UNIVERSITE TOULOUSE III **2008-2009**

Licence Physique-Chimie et Applications

Mention Sciences Physiques et Chimiques-L3

Electromagnétisme de la matière

Examen terminal

(*durée 2h*)

I. Question de cours : Propagation d'une OPPM dans la matière.

On considère un milieu linéaire homogène et isotrope (l.h.i.), non magnétique.

1) Ecrire les 4 équations de Maxwell en notation complexe où : $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 \exp -(i\omega t)$, pour le cas où il n'y a ni charge, ni courant « extérieur » ou « autre ».
2) Montrer que : **rot** $\underline{\mathbf{B}}_0 + i\,(\omega/c^2)\,\underline{\varepsilon}_r\,.\,\underline{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{0}$ où $\underline{\varepsilon}_r$ est la permittivité complexe qui est supposée connue.
3) Montrer que $\underline{\varepsilon}_r\,.\,\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{E}}_0 = 0$.
4) Montrer que l'équation précédente conduit à deux catégories d'ondes progressives : l'une de champ électrique longitudinal et l'autre de champ électrique transverse.
5) Dans le cas transverse, en déduire l'équation d'onde et la relation de dispersion $\omega(\underline{\mathbf{k}})$.

II. Un cylindre supraconducteur infiniment long, de rayon R et d'axe Oz, est plongé dans un champ appliqué $\vec{B}_a = B_a\,\vec{e}_Z$. On admet que le champ macroscopique total $\vec{B}$ vérifie l'équation de London : $\Delta\,\vec{B} = \dfrac{\vec{B}}{\lambda_L^2}$, où Δ est l'opérateur Laplacien et λ_L est l'épaisseur de London. On donne $R \gg \lambda_L$. on s'intéressera aux points de l'espace tels que leur distance à l'axe Oz soit $\rho \gg \lambda_L$.

1) Montrer qu'à l'intérieur du cylindre une solution pour le champ magnétique $\vec{B}$ est donné par : $\vec{B} = B_S \exp -(\dfrac{R-\rho}{\lambda_L})\vec{e}_Z$, où B_S est une constante. On rappelle qu'en coordonnées cylindriques : $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$. Pour cette démonstration, on s'intéressera aux points de l'espace tels que leur distance à l'axe

Oz soit $\rho >> \lambda_L$. On justifiera clairement les invariances et les approximations. Tracer la courbe B(ρ< R) en prenant B = 0 pour ρ inférieur ou de l'ordre de λ_L .

2) En tenant compte de l'inégalité forte : { $\lambda_L << R$ }, quelle signification physique peut-on donner à λ_L ?

3) Montrer que l'expression $\vec{J} = -J_{Max} \exp(-\dfrac{R-\rho}{\lambda_L})\vec{e}_\varphi$ pour le courant volumique au voisinage de la surface intérieure du cylindre est compatible avec : $rot\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$.

En coordonnées cylindriques pour un vecteur $\vec{V}$, on a:

$$\mathbf{rot}\vec{\mathbf{V}} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{e}}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\vec{\mathbf{e}}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{\mathbf{e}}_z .$$

Exprimer J_{Max} en fonction de B_S , λ_L et μ_0.

4) Calculer $\vec{J}_S = \int_0^R \vec{J} d\rho$. En s'appuyant sur l'inégalité forte : {$\lambda_L << R$}, expliciter l'analogie entre la distribution de courant décrite ci-dessus et celle qui caractérise un solénoïde infini. On rappelle l'expression du champ magnétique dans un solénoïde infini parcouru par un courant I: $B_{sol} = \mu_0 n I$ (n= nombre de spires par mètre). Indiquer l'écriture possible de $\mathbf{B}_{sol}$ en fonction d'un courant surfacique $\vec{J}_S$ dont on rappellera la définition. Utiliser cette analogie avec le cas présent pour déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}_m$ créé par le courant à l'intérieur du cylindre, loin de la surface, en fonction de $\vec{J}_S$.

5) En déduire la relation entre $\vec{B}_m$ et $\vec{B}_a$, puis entre $\vec{J}_{Max}$ et $\vec{B}_a$.

6) En résumé, la supraconductivité vous fait penser à l'un des trois phénomènes suivants :
Diamagnétisme, Paramagnétisme, Ferromagnétisme ; lequel et pourquoi ?

7) On considère un tronçon de cylindre de longueur dz selon $\mathbf{e}_z$
   a) Calculer le courant dI total dans ce tronçon
   b) Calculer le moment magnétique élémentaire d**M** de la spire ainsi constituée.
   c) En déduire le vecteur aimantation volumique en fonction de $\vec{B}_a$ et μ_0.